

## 第四章 附加材料

### — 介绍 —

你是否希望在简洁的课程描述中有更多的例子、讨论和评论？如果是这样，你来对地方了！这个文件包含了第四章中一些活动的附加材料。

对于谜题，提供了许多已解谜题的例子，以及如何创建它们的额外评论。早期家庭数学项目基于这样的理念：早期数学应当是家庭共同完成的事情，为孩子制作谜题与孩子一起做是这一过程的重要部分。一旦你掌握了每个谜题，你会发现大多数谜题甚至全部谜题对于你来说都比较容易创建。

这些谜题有不同的难度等级，接下来的页面中有许多关于如何创建这些等级的建议和示例。总是从最简单的谜题开始。这远比让孩子在难度过大的谜题中感到沮丧、气馁和过度挑战要好。让孩子在稍微简单的谜题中体验成功、理解和乐趣是更好的选择。一旦孩子建立了对数学活动的信心和热情，就可以逐步引入更大的挑战。同时，并不是所有的谜题对每个人都是有趣的，所以不要强迫进行那些似乎不太吸引人的谜题和活动。

以下页面中包含了：

- 第四章 – 封闭和
- 第四章 – 跳岛 – 补偿
- 第四章 – 差异三角形和和三角形
- 第四章 – 跳岛 – 跳跃计数
- 第四章 – 修复它
- 第四章 – 跳岛 – 按单位和十位数跳
- 第四章 – 单人形状谜题
- 第四章 – 和平方
- 第四章 – 加法金字塔
- 第四章 – 调查

---

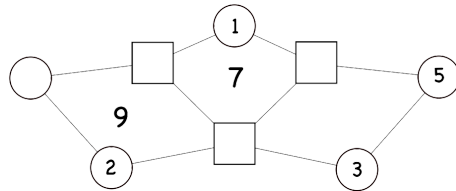
### — 法律声明 —

每个家庭都应该有机会一起学习和享受数学。为此，《早期家庭数学》是一个材料合集，家庭和教育者可以自由编辑、翻译、复制和分发这些材料，仅限于非商业用途，无需获得许可。

## 第四章 – 封闭和

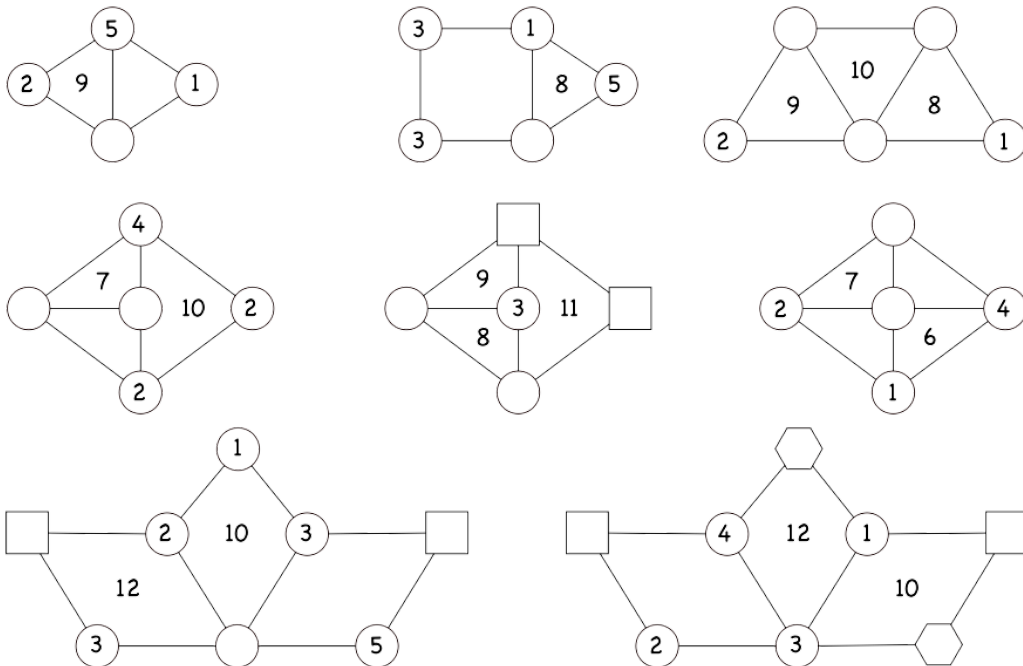
这些谜题包含了由线连接的形状。每个封闭区域都有一个数字，这个数字是与它相邻的形状的总和。类似于形状和谜题，圆形的值可以是任何值，而非圆形的形状的值必须与相同类型的其他形状相同。例如，所有的正方形必须具有相同的值，而所有的六边形也必须有相同的值。你还可以选择增加一个规则，即不同的非圆形状必须具有不同的值——例如，正方形和六边形必须有不同的值

孩子的任务是找出那些没有给出的形状和区域的数字。



创建这些谜题的方法如下：首先，制作一个包含圆形和可能的其他形状的图示。接着，为所有形状填写数字，并将封闭区域中的数字填写为其周围形状的总和。最后，去掉一些数字。

与第三章中的形状和谜题类似，从简单的谜题开始，只遗漏一两个数字，然后逐渐增加难度，包括更多缺失的数字、相邻的封闭区域和更多使用非圆形区域的值。



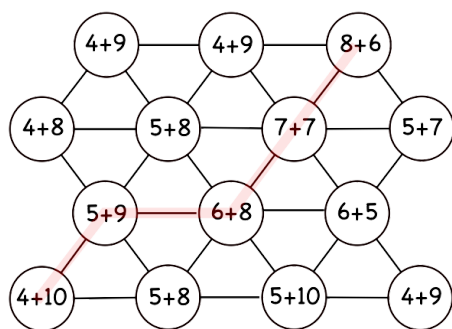
## 第四章 - 跳岛 - 补偿

使用补偿法来简化加法问题。这种方法的思路是从一个加数中取出一个数值并将其加到另一个加数上，这样结果保持不变，但其中一个数字变得更容易处理。

例如，当你计算  $7 + 8$  时，如果你从 7 中取出 2 加到 8 上，问题就变成了  $5 + 10$ 。或者，你也可以从 8 中取出 3 加到 7 上，问题变成了  $10 + 5$ 。每当你能让其中一个数字成为 10 的倍数时，问题就会变得更简单。

这些谜题提供了练习使用补偿法创建新问题的机会。挑战在于找到一条路径，连接所有具有相同答案的岛屿。只有当两个岛屿的问题数字相差 1 时，才可以连接它们。只有一些岛屿会在路径上。

制作这些谜题时，从大约十个岛屿开始，设置一些连接。在这些岛屿的路径上，放置相差一个的加法问题——可以从一个涉及加 10 的问题开始，然后在此基础上做出变化。在靠近路径的岛屿上，设置一些有小变化且答案不同的问题。

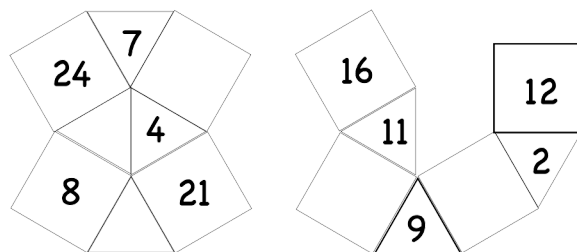


这些谜题在难度上的变化空间确实有限。引入错误路径可能会导致混淆，而不是增加挑战，因此通常来说这并不是一个好主意。

# 第四章 - 差异三角形和和三角形

## — 差异三角形 —

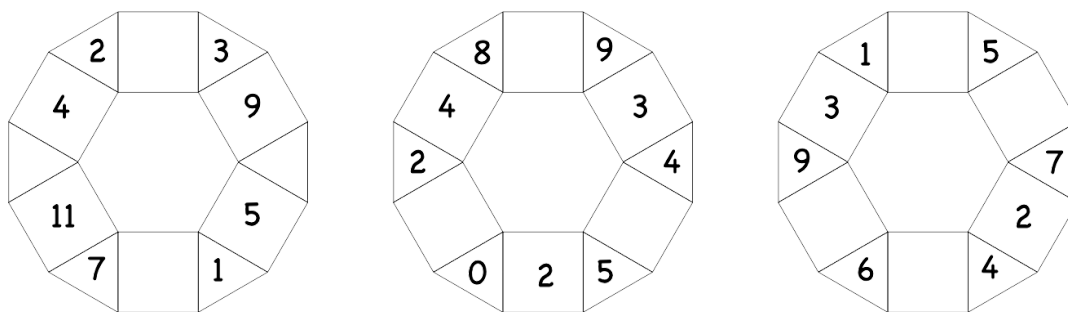
差异三角形谜题由三角形和共享边的正方形组成。一个三角形的两边总是各有一个正方形，剩下的一边要么是与另一个三角形相邻，要么是空的。三角形中的数字是相邻两个正方形数字的差值。挑战在于填补缺失的数字。



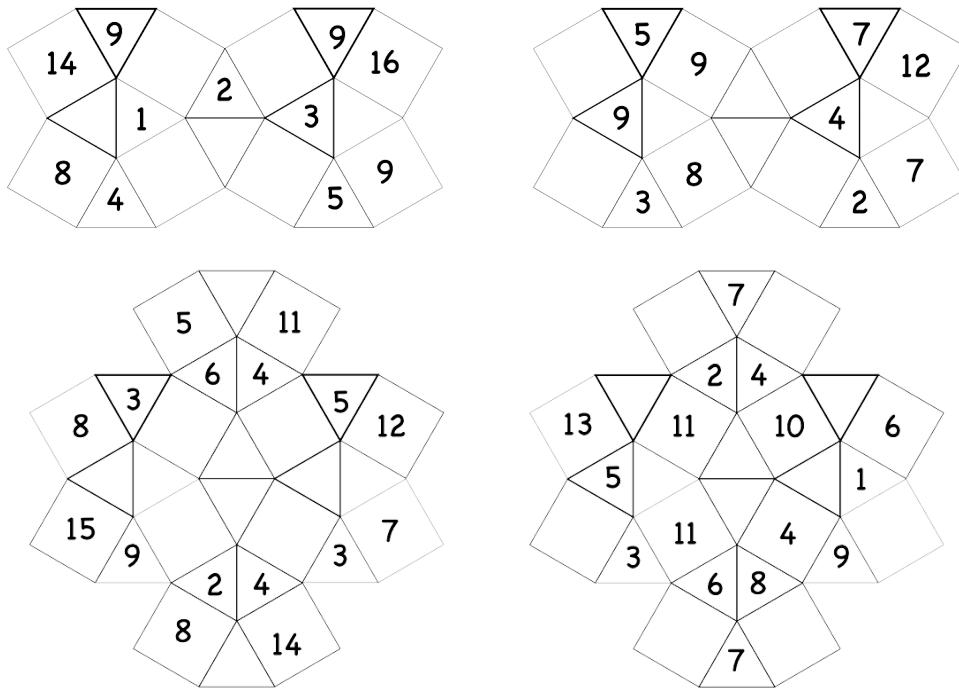
**构建谜题:** 制作没有循环的谜题很简单。绘制一个由正方形和三角形交替组成的序列，从一端开始填写数字，然后依次填到另一端。完成后，移除一些数字。制作带有循环或更复杂互动的谜题则要复杂一些；不过，付出的努力会带来更具挑战性的谜题！

当你的孩子对这些谜题非常熟练后，他们可能会想自己动手制作一些新的谜题。通过弄清楚数字如何组合在一起，他们会在这个过程中获得乐趣并学到很多东西。

**解决策略:** 首先应处理的地方是两个已填充正方形之间的任何三角形。另一个简单的情况是，一个已填充三角形旁边有一个较小已填充正方形的正方形——在这种情况下，由于我们不使用负数，填充空白正方形的选择只有一个。最常见的情况是，一个正方形在一个方向上有两个可能的值，在另一个方向上有两个其他的可能值——通常这些可能值中只有一个数字是重叠的。

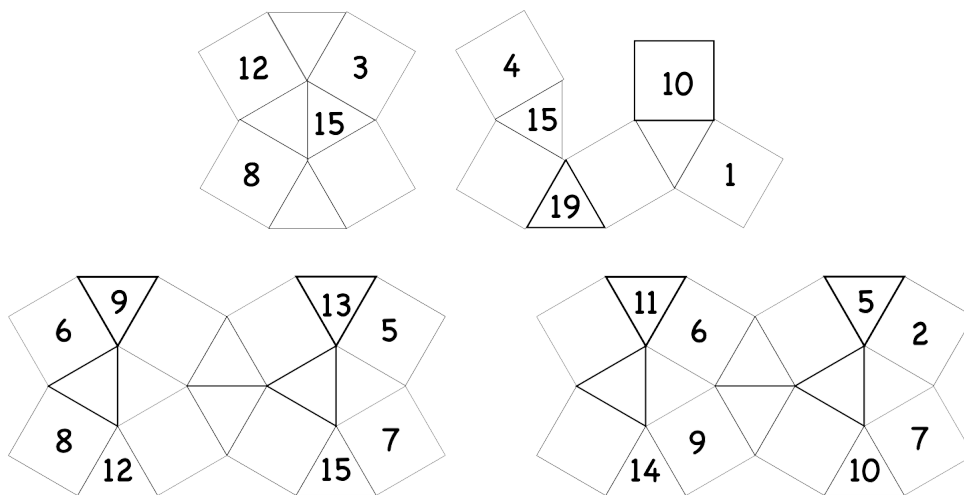


这里有一些包含大量相互连接的示例。



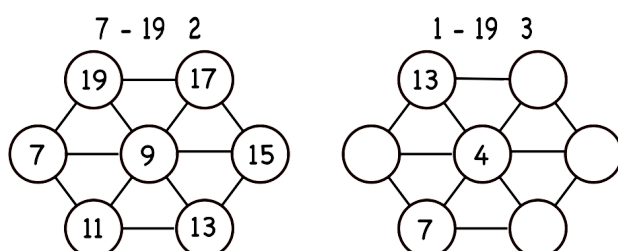
### — 和三角形 —

和三角形谜题与差异三角形谜题类似，只是它们使用加法代替减法。一个三角形的值是其相邻的两个或三个正方形的和。制作这些谜题的方法与差异三角形类似。通常来说，和三角形谜题比差异三角形更容易解决。



## 第四章 - 跳岛 - 跳跃计数

这些谜题包含了由桥梁(线条)连接的岛屿(圆形)。在这个版本的跳岛谜题中,连接是通过跳跃计数完成的。某些岛屿上有写好的数字,有些则起初是空白的。谜题上方会标出起始数字、结束数字和跳跃数。挑战在于填补缺失的数字并找到路径。你也可以将数字和空白放在地上的纸片上,制作成踏步谜题。

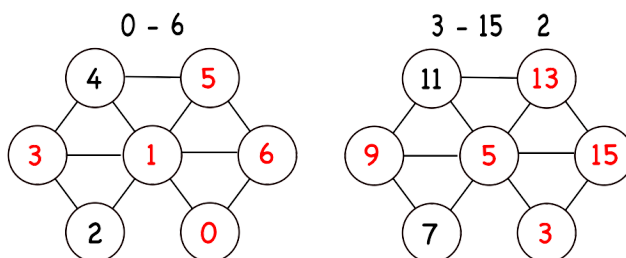


与跳跃计数活动类似,创建谜题时可以练习从不同的数字开始向前或向后跳跃,而不仅仅是从跳跃数的倍数开始。

制作这些谜题的方法与第二章早期的跳岛-计数谜题相同。首先制作岛屿,填写跳跃计数的数字,将这些岛屿按正确的顺序连接起来,然后添加一些额外的连接,使其成为谜题。在提供给孩子的版本中,去掉一些数字,但保留足够的数字,以便仍能解决谜题。

你可以参考第二章附加材料中描述的谜题构建策略。此外,如果你还保留有那些谜题,将其中一个转换为这种谜题非常简单。拿第二章中的以下谜题为例,它涉及从0计数到6。红色数字是通常在给孩子时会留下的。要将其转换为从3开始、按2跳跃的谜题,只需将所有数字乘以2,然后加3,如下表所示。之后,替换原始数字为新数字(当然,红色数字要留出)。

	0	1	2	3	4	5	6
乘2	0	2	4	6	8	10	12
加3	3	5	7	9	11	13	15



## 第四章 - 修复它

从一个4x4的数字网格开始，目标是使每行和每列剩余数字的和等于目标和。挑战在于找到要移除的条目，以确保每行和每列的和为目标值。另一种版本是为每行和每列设定单独的目标和。

制作这些谜题时，可以将一对或三组数字放入网格中，这些数字的和等于目标和。然后，用诱饵数字填充剩余的空格。通过设置部分符合要求的备用对数或三组数字，可以使谜题更具挑战性。如果你的孩子喜欢这些谜题，但觉得太简单了，你可以制作更大的网格，例如4x5、5x5，甚至更大。

这里添加了红色星星，显示了哪些条目需要被移除，以使谜题能够正常工作。

8			
6	3	5	2
2	1	4	5
3	4	1	3
6	4	2	5

9			
7	4	5	2
2	1	4	6
3	4	4	1
6	4	5	3

10			
3	3	6	4
7	1	2	6
4	6	1	4
6	4	8	2

11			
8	3	5	4
1	1	4	7
3	8	1	3
7	5	7	4

这里有两个使用每行和每列单独目标和的谜题。

6	3	7	8	16
2	1	4	5	9
3	4	7	3	10
5	6	3	5	11
11	9	18	8	

0	6	5	2	8
7	8	5	4	12
2	7	1	4	9
3	1	9	8	17
9	13	14	12	

## 第四章 - 跳岛 - 按单位和十位数跳

给定一个数字的矩形网格，其中部分数字已填入。挑战是填补剩余的数字，使得任何两个共享一边的数字在某一位置上的差异为1(包括0到9之间的转换)。整个网格中的数字不能重复。参考100图表可能对初学者有帮助。

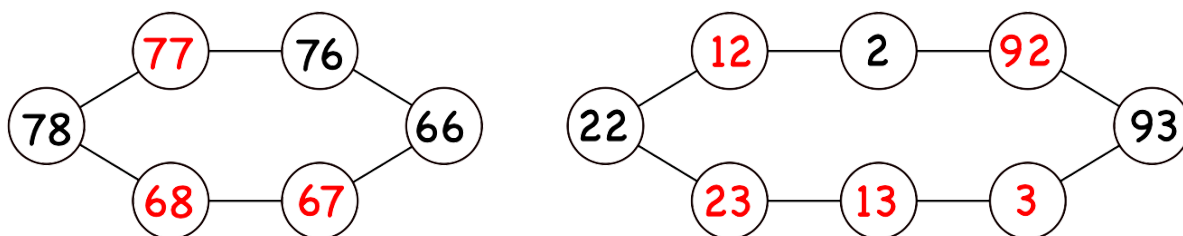
制作这个谜题的方法是：首先在空白网格中填入不重复的数字。接着，移除一些数字，确保对孩子来说不会太难。在这些示例中，红色数字是缺失的数字。

57	67	66	56
5	4	94	95

33	23	13
32	22	12

使用一位数和两位数进行这种谜题时，通常不会有太多复杂的变数。然而，这些谜题是练习位值思维的好方法。一个可能让孩子感到惊讶的细节是像95到5再到15，或11到10再到0再到9这样的过渡——他们可能没有意识到单个位数中有一个0在十位上，并且可能对0和9之间的连接感到惊讶。

网格是一种自然的方式来呈现这些问题。然而，这些谜题也可以像其他跳岛谜题一样用圆圈表示，这种表示方法在制作谜题时提供了更多的自由。



## 第四章 - 单人形状谜题

### — 魔法三角形 —

制作一个包含六个圆形的三角形，每边有三个圆。在这些圆圈中，使用从1到6的每个数字一次，使得三角形的每一边的和相等。这涉及两个挑战——找出哪些和是可行的，然后确定如何达到这些和。最好让孩子自己动手尝试，以找出哪些和是可能的，但如果孩子感到沮丧，可能的和是9、10、11和12。

如果你的孩子喜欢解决这个谜题，可以尝试更大的三角形。例如，对于一个包含九个圆圈的三角形，每边有四个圆圈，可能的和为17、19、20、21和23。

正如许多这个年龄段的谜题一样，让孩子玩这个谜题的主要目的是鼓励他们探索数字之间的相互作用并练习数字事实。他们还没有系统地探索的数学或推理能力。然而，这些谜题可以更深入地探索，如果你或一个较大的孩子感兴趣，可以尝试以下一些想法。

设SUM为三角形一边的和。如果你把三角形的三边加起来，总和将是 $3 \times \text{SUM}$ 。然而，三边的总和也将是所有数字的和加上每个角落的一个额外副本。设C-SUM为三个角的值的和。我们得到的关系是 $3 \times \text{SUM} = (\text{所有数字的总和}) + \text{C-SUM}$ 。

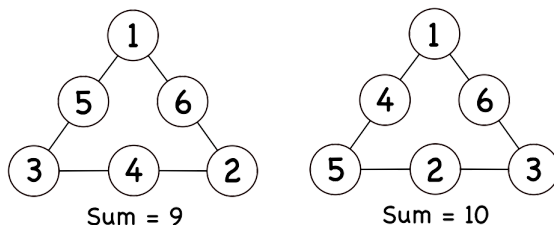
**6个圆圈的谜题：**将其应用到六个圆圈的三角形中。所有数字的和是从1到6的总和，即21。所以方程变成 $3 \times \text{SUM} = 21 + \text{C-SUM}$ 。C-SUM的最小值是 $1 + 2 + 3 = 6$ ，最大值是 $4 + 5 + 6 = 15$ 。因此， $3 \times \text{SUM}$ 在 $21 + 6 = 27$ 和 $21 + 15 = 36$ 之间。这使得SUM必须是9、10、11或12。还要注意 $\text{C-SUM} = 3 \times \text{SUM} - 21$ ，这对于找出角落的值很有用。

另一个要注意的事情是可能值的对称性。造成这种对称性的原因是，对于每个解，存在一个通过将所有数字从7中减去（或对于九个圆圈的谜题，从10中减去）得到的另一个解。稍作计算将显示，这种对称性将一个和为SUM的谜题转换为一个和为 $(21 - \text{SUM})$ 的新的谜题（对于九个圆圈的谜题，则为 $40 - \text{SUM}$ ）。

在实际数字之前，最后一个要注意的是，对于三个角的任何解，我们可以假设它们按顺时针方向递增排列，最小的数字在顶部。如果它们最初不是这种配置，可以旋转或翻转图示，直到它们是。

所有这些观察节省了大量工作。我们只需要查看SUM等于9和10的情况，并且只需要角落的数字按递增顺序排列。如果SUM是9，则 $\text{C-SUM} = 3 \times 9 - 21 = 6$ ，因此三角形的角是1、2和3。如果SUM是10，则 $a + b + c = 3 \times 10 - 21 = 9$ 。这留下两个可能性——角落值为1、2和6，或1、3和5。快速尝试排除了1、2和6作为可能性。

经过大量工作，我们得到了六个圆圈的谜题中SUM为9和10的解。记住，你可以通过从7中减去所有条目来得到SUM为11和12的解。



**9 圆圈谜题。**对 9 圆圈谜题使用相同的方法。数字 1 到 9 的总和是 45。因此， $3 \times \text{SUM} = 45 + \text{C-SUM}$ 。最小的 C-SUM 可以是  $1 + 2 + 3 = 6$ ，最大的可以是  $7 + 8 + 9 = 24$ 。因此， $3 \times \text{SUM}$  的范围在  $45 + 6 = 51$  和  $45 + 24 = 69$  之间，这迫使 SUM 在 17 到 23 之间。取一个解决方案，并从每个条目中减去 10，得到以下 SUM 配对： $17 - 23$ 、 $18 - 22$ 、 $19 - 21$  和  $20 - 20$ 。因此，仅需要 17、18、19 和 20 的解决方案。对应的 C-SUM 值分别为 6、9、12 和 15。

SUM = 17 和 C-SUM = 6。对于这种情况，角落必须是 1、2、3，这样是可行的。

SUM = 18 和 C-SUM = 9。对于这种情况，角落必须是 1、2、6 或 1、3、5，但都不适用。

SUM = 19 和 C-SUM = 12。角落有很多可能的组合，但唯一有效的组合是 1、4、7 和 2、3、7。

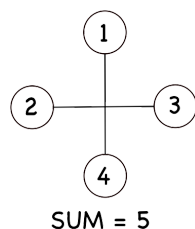
SUM = 20 和 C-SUM = 15。角落的组合太多了，其中许多都是有效的。两个有效的组合是 1、5、9 和 2、5、8。

### — 魔法设计 —

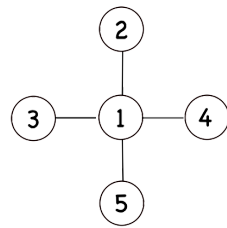
类似于魔法三角形，这些谜题有圆圈按照几何图形连接，并且有一组相关的数字。将这些数字放入圆圈中，使得每条连接圆圈的直线上的数字和相同。

这些谜题的分析类似于魔法三角形的分析。设SUM为所有行共享的公共和。对于那些有一个中间圆圈的谜题，设c为中间圆圈的值。一般策略是将所有行加起来，并调查揭示出的关系。还要注意，就像魔法三角形一样，可以通过从比最大数字大一个单位的所有条目中减去，来创建新的解。

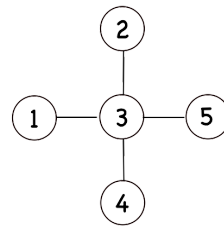
1、1到4的数字以十字形排列，没有公共圆圈。数字1到4的总和为10，这在两个方向上平均分配。所以SUM = 5，答案很简单。



2、数字1到5以十字形排列，中间有一个公共圆圈。数字1到5的总和为15。将两个方向上的和相加得到 $2 \times \text{SUM} = 15 + c$ 。由于 $15 + c$ 必须是偶数，所以 $c$ 可以是1、3和5。可以通过从6中减去所有数字，来从 $c = 1$ 的解得到 $c = 5$  ( $\text{SUM} = 10$ )的解。

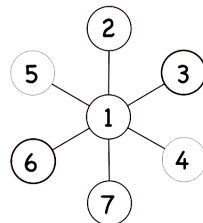


$c = 1 \quad \text{SUM} = 8$

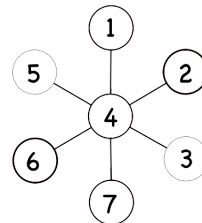


$c = 3 \quad \text{SUM} = 9$

3、数字1到7以三圆线排列，其中一个圆圈在中间共享。将三个方向上的和相加得到 $3 \times \text{SUM} = 28 + 2 \times c$ 。由于3能够整除 $28 + 2 \times c$ ，这使得 $c$ 必须是1、4或7。 $c = 1$ 和4的解已给出。

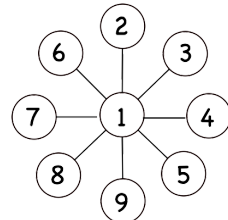


$c = 1 \quad \text{SUM} = 10$

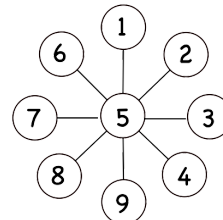


$c = 4 \quad \text{SUM} = 12$

4、数字1到9以三圆线排列，其中一个圆圈在中间共享。将四个方向上的和相加得到 $4 \times \text{SUM} = 45 + 3 \times c$ 。由



$c = 1 \quad \text{SUM} = 12$



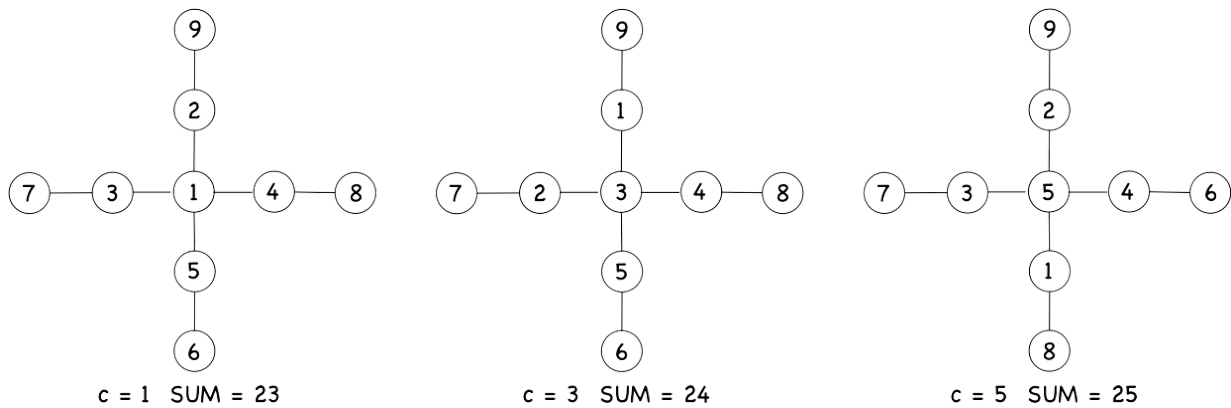
$c = 5 \quad \text{SUM} = 15$

于4能够整除 $45 + 3 \times c$ ，这使得 $c$ 必须是1、5或9。

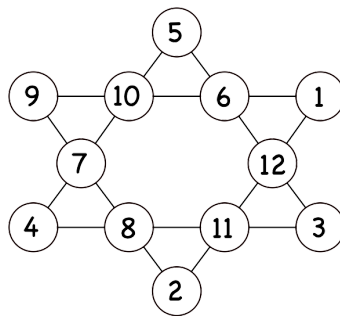
5、数字1到5以L形排列，其中一个圆圈在角落处共享。这实际上与问题#2相同，因此解基本上是一样的。

6、数字1到8以十字形排列，没有公共圆圈。两个方向上的和均分36(所有数字的和)，因此 $\text{SUM} = 18$ 。有多种方法可以通过将数字集分成两个和为18的组来解决这个问题。一种解法是1、2、7、8和3、4、5、6，另一种解法是1、3、6、8和2、4、5、7。

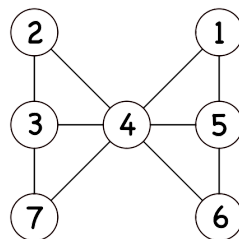
7、数字1到9以十字形排列，中间有一个公共圆圈。将两个方向的和相加得到 $2 \times \text{SUM} = 45 + c$ ，因此c可以是1、3、5、7和9。已给出c = 1、3和5的解。



8、数字1到12以星形排列。这有6个方向，每个方向有4个圆圈。这比其他题目要难得多。如果将所有方向相加，每个数字将被使用两次。数字1到12的总和为78。因此，我们有 $6 \times \text{SUM} = 2 \times 78$ ，这意味着 $\text{SUM} = 26$ (提示中给出)。下面给出了一种解法。和往常一样，通过将所有条目从13中减去，可以得到另一种解法。



9、数字1到7以H形排列 - 左边有3个竖直圆圈，中间有1个，右边有3个竖直圆圈。有5条可能的3个连接圆圈的线。如果将5个方向相加，所有圆圈将被使用两次，唯一的例外是中间圆圈被使用三次。将5个方向相加得到 $5 \times \text{SUM} = 2 \times 28 + c$ 。由于5能够整除 $56 + c$ ，这使得 $c = 4$ ，并且在这种情况下 $\text{SUM} = 12$ (提示中给出)。请注意，2和3不能与1在同一侧，这导致了以下解法。



## 第4章 - 和方格

从一个3x3的方格开始，该方格给出了每一行和每一列的目标和。一些从1到9的数字已经放置在方格中。对于那些尚未放置的数字，挑战在于将它们放置到方格中，以使每行和每列的和符合目标值。

要制作这种谜题，可以在3x3的方格上放置1到9的纸片。对于每一行和每一列，在右侧或下方写上和。然后，从方格中移除一些数字。最后，将你移除的纸片交给你的孩子，并问：“这些在哪里？”由于这些谜题非常容易创建，它们是让你的孩子为你创建谜题并让你解决的好方法。

一种使和较小的变体是使用0到8的数字。一个更难的变体是用1到12的数字在3x4的方格中，甚至在4x4的方格中使用1到16的数字。

6	3	5	14
2	8	4	14
7	1	9	17
15	12	18	

6	3	5	14
2	8	4	14
7	1	9	17
15	12	18	

6	3	5	14
2	8	4	14
7	1	9	17
15	12	18	

制作原始填充的谜题是相当简单的。正如上面提到的，只需填入所有数字并写下和即可。谜题制作者的挑战在于去除适量的信息，以使谜题具有挑战性但又不至于过于困难。

**解决和创建策略：**首先填入那些在某行或某列中只有一个缺失数字的方格。这三个谜题中的最左侧一个比较容易解决，因为在填入5和7之后，3和2就很容易解决，然后最后的8也会很容易解决——每解决一个单一数字，就会创建新的单一数字，这些新数字的计算也很简单。

容易计算的谜题是你孩子很好的练习，所以不必担心所有谜题都要很复杂。

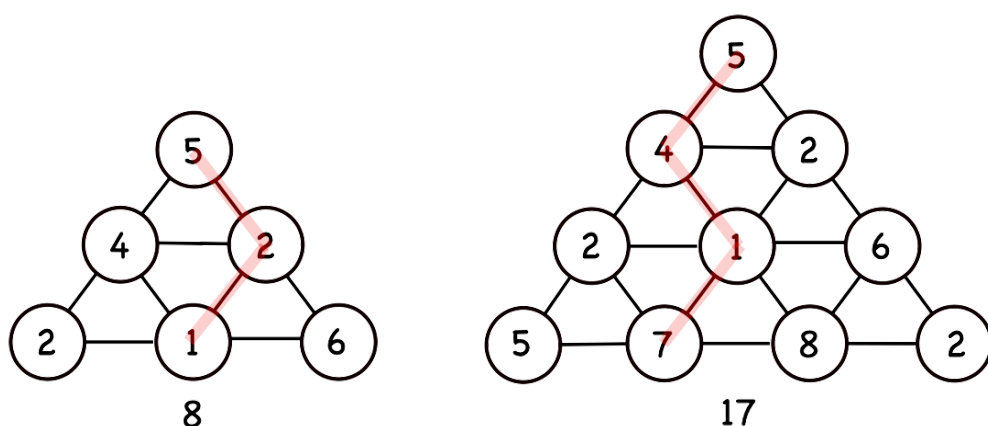
中间的谜题稍微难一些，因为没有单一缺失的数字。对于这些谜题，一个好的策略是寻找具有特别大或特别小缺失和的行或列——这些行列的选择相对较少。对于这个谜题，底行和最右列是很好的起点。底行缺失的数字和为16，因此它们必须是7和9。9不能放在包含6的列中（那样列的和会太大），所以可以确定7和9的位置。剩下的部分可以按照之前的谜题解决。

在最下面的谜题中，有两个边上的数字被省略了。一旦你的孩子意识到边上的数字和为45（即1到9的和），填入一个缺失的边上数字就会变得简单。

## 第4章 - 加法金字塔

一个由10个数字排列成4行的金字塔和一个目标数字。挑战是找到一条路径，从金字塔的每一行中选择一个数字，使这些数字的和等于目标数字。路径上的数字必须相邻触碰。

制作这样的谜题时，先填入你想形成路径的数字，并记录这些数字的总和。然后填入金字塔中其余的伪装数字。每增加一行，金字塔中可能的路径数翻倍，因此制作更大的金字塔是对那些觉得10数字谜题简单的孩子的挑战。对于那些觉得10数字谜题难的孩子，从6数字谜题开始，直到他们变得容易且快速解决。



对于较大的谜题，确保金字塔中只有一条正确路径对谜题制作者来说可能是一项挑战。不必过于担心这一点。尽管只有一条路径是很好的，但你的孩子会很享受向你展示还有其他解决方法的乐趣。

## 第4章 - 调查

### — 花瓣 — 调查

在一个神奇的花园里，有两种花。一种有4片花瓣，另一种有7片花瓣。一个孩子被要求挑选一些花，使得花瓣的总数为13。这可以做到吗？15片花瓣呢？对于哪些花瓣数是可以实现的？对于可以实现的数字，是否有多种方式？例如，32片花瓣可以由四朵7片花瓣的花和一朵4片花瓣的花组成，也可以由八朵4片花瓣的花组成。

通过尝试许多数字对，可以找到很多有趣的例子。有些数字对会有一个点，从这个点开始，所有花瓣数都可以实现，而其他数字对则没有这样的点。对于4和7来说，从18开始，每个数字都是可以实现的。而对于3和6来说，没有一个点使得所有数字都能出现。

这种模式是什么？是什么造成了这种模式？这些问题通常会出现，也是在这里发生了许多有趣的事情。

当某些数字可以被两个数字整除时，最容易看出发生了什么。以3和6为例。将这些数字看作 $1 \times 3$ 和 $2 \times 3$ 。当你将这些数字加在一起时，你总会得到一些3的倍数。由于10不是3的倍数，因此不能通过加3和6来得到10。

当1是唯一可以整除这两个数字的数字时，总会有一个点，使得每个数字都能被实现。对于4和7来说，这个数字是18。要找到这个数字，从每对数字中减去1，然后将这些新数字相乘。在这种情况下，得到的是 $3 \times 6 = 18$ 。另一个有趣的方面是，在18以下的数字中，恰好一半的数字是可以实现的。为什么会这样涉及到一些对于小孩子来说过于复杂的数学内容；然而，玩这些计算和你孩子对这些模式的经历可能会在很久之后突然明白。

### — 爬楼梯 - 有多少种方法 — 调查

假设你的孩子有时喜欢每次迈两步，有时又喜欢每次迈一步。如果你的孩子想要爬上几级台阶，一个自然的问题是：有多少种方法可以做到这一点？

例如，对于0级台阶，只有一种方法——你就站在那里。对于1级台阶，有一种方法——你迈一步。对于2级台阶，你可以选择迈一步两次，或者迈一步一次加上再迈一步一次。

你的孩子应该仔细计算许多这种情况，并制作一个结果表。当信息量很大时，表格通常有助于组织信息并使模式显现出来。表格可能如下所示（虽然超过6级台阶可能需要过多耐心，但这里是这些数字）：

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

观察这些数字后，你的孩子可能会注意到每对连续数字的和等于下一个数字。这是为什么呢？这些数字被称为斐波那契数。生成斐波那契数的规则是每个数字是前两个数字的和。对于台阶问题也是如此。嗯……

让我们仔细看看一个例子——假设5级台阶。8种可能的方法是： $1+1+1+1+1$ ， $1+1+2+1$ ， $1+2+1+1$ ， $2+1+1+1$ ， $2+2+1$ ， $1+1+1+2$ ， $1+2+2$ ，和 $2+1+2$ 。前5种可能性中，最后一步是1步，而最后3种可能性中，最后一步是2步。这就解释了：你可以通过先爬4级台阶再多爬1步，或者先爬3级台阶再多爬2步来爬5级台阶。爬5级台阶的方法数正好等于爬4级台阶的方法数加上爬3级台阶的方法数。

通过耐心地举例、组织数据、仔细查看数据并挖掘为什么会这样，往往能理解模式。这是培养你孩子的一个好习惯。

## — 平衡秤 — 调查

平衡秤是一种简单的设备，用于判断两个物体的重量是否完全相同。平衡秤通常配备一组重量，用于测量其他物体的重量。如果限制使用的重量种类，有许多有趣的研究可以进行。

**一种重量的情况：**假设你有很多重量，但它们都是相同的——比如说5单位。那么，你只能准确称量重量是5的倍数的物体（就像按5的倍数跳数一样）。

**两种重量 - 一侧：**假设你有很多重量，重量要么是4单位，要么是7单位，并且你只在平衡秤的一侧使用这些重量。你可以称量的物体重量与在花瓣调查中找到的数字相同。对于4和7，从18单位开始，你可以准确称量所有重量。如果重量是4单位和6单位，你只能称量从4开始的偶数。

**两种重量 - 两侧:** 在用两种重量在平衡秤的一侧进行调查之后, 如果你让孩子用4单位和7单位的重量来称量3单位或1单位的物品, 他们可能会感到惊讶。诀窍是将一些重量放在一侧, 其他重量放在另一侧。例如, 可以通过将3单位物品与一个4单位的重量一起放置, 并看到它与一个7单位的重量平衡, 从而验证物品的重量是3单位。类似地, 可以通过将1单位物品与一个7单位的重量一起放置, 并看到它与两个4单位的重量平衡, 从而验证物品的重量是1单位。

这个调查隐藏了一个重要的数学定理, 叫做贝祖定理(Bezout's Theorem)。你的孩子目前不需要了解这个定理, 但能用这种方式玩转高级数学是非常有趣的!

**加倍重量:** 如果你有一个每个加倍进程的重量(1, 2, 4, 8, 16), 会发生什么? 如何称量一个13单位的物品? 你能测量的最大重量是多少?

经过一些调查, 你会发现你可以称量所有重量, 直到最大重量的两倍减去1——在这个例子中是31。同时, 你可以称量的每个物品只能用一种方式称量。例如,  $13 = 1 + 4 + 8$ , 没有其他方法。这非常酷! 这种情况与二进制数字系统相关。

**斐波那契重量:** 如果重量是斐波那契数会发生什么? 是否有多种方法来称量某些重量? 找出一个限制, 使得每个重量只有一种称量方式。

假设你有1, 1, 2, 3, 5, 8, 13这些斐波那契数的重量。用这些重量,  $10 = 2 + 3 + 5 = 2 + 8 = 1 + 1 + 3 + 5 = 1 + 1 + 8$ 。造成重复的原因是斐波那契规则使得斐波那契数可以以不同的方式表示自己——例如,  $2 = 1 + 1$  和  $8 = 5 + 3$ 。解决这个问题的方法是坚持不使用序列中相邻的两个斐波那契数。当你加上这个限制时, 得到10的唯一方法是  $2 + 8$ 。